RELACIÓN 4: FORMULACIÓN DE HAMILTON-JACOBI

PROBLEMA 4.1. a) Compruebe si es canónica la transformación dada por

$$Q = -p, \quad P = q + p^2$$

y determine la función generatriz, $F(q,p)$ para ella. b) Calcule $F_1(q,Q)$ y $F_2(q, P)$, siempre y cuando sea posible.

Solución: Es canónica, $F_1(q,Q) = -qQ - \frac{Q^3}{3}$ y $F_2(q,P) = -\frac{2(P-q)^{3/2}}{3}$.

PROBLEMA 4.2. Un sistema con un grado de libertad viene descrito por la Hamiltoniana $H(q,p,t) = q + te^p$. a) Demuestre que la transformación

$$Q = q + te^p$$
$$P = p$$

es canónica.

b) Determine la función generatriz $F_1(q,Q,t)$ y la nueva Hamiltoniana $K(Q,P,t)$.

c) Plantee las ecuaciones del movimiento y resuélvalas.

d) Compruebe que se cumple la igualdad

$$\frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial t} = \frac{\partial F_1(q,p,t)}{\partial t} + P(q,p,t)\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial t}$$

e) Estudie el resto de funciones generatrices, $F_2(q,P,t)$, $F_3(p,Q,t)$ y $F_4(p,P,t)$, las condiciones de existencia de las mismas y obtenga la nueva Hamiltoniana a partir de estas funciones.

Solución: a) Es canónica, b) $F_1(q,Q,t) = (q-Q)\left[\ln(Q-q) - \ln(et)\right]$, $K(Q,P,t) = Q + e^P$,

c) $P = P_0 - t$, $Q = Q_0 - e^{P_0}\left(e^{-t} - 1\right)$, e) $F_2(q,P,t) = qP + e^P$, $F_3(p,Q,t) = pQ - te^p$. $F_4(p,P,t)$ no existe, pues no se puede pasar de las variables (q,P) propias de $F_2(q,P,t)$ a las variables (p,P) propias de $F_4(p,P,t)$, ya que $\left|\frac{\partial p(q,P)}{\partial q}\right| = 0.$

PROBLEMA 4.3. Compruebe si es canónica la siguiente transformación

$$Q_1 = q_1, \quad P_1 = p_1 - 2p_2$$
$$Q_2 = p_2, \quad P_2 = -2q_1 - q_2$$

Solución: Se obtiene $F(q_j, p_j) = 2q_1 p_2 + q_2 p_2$, pero no se cumplen las condiciones sobre los Jacobianos para sustituir las variables originales y definir $F_1(q_j, Q_j)$, $F_2(q_j, P_j)$, $F_3(p_j, Q_j)$ ni $F_4(p_j, P_j)$.

PROBLEMA 4.4. La Lagrangiana de un sistema viene dada por

$$L = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 + cq\dot{q} - \frac{1}{2} kq^2,$$

Siendo c y k constantes. Una determinada transformación canónica hace que la nueva función Hamiltoniana sea

$$K(Q,P) = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} kQ^2.$$

Obtenga una función generatriz de esta transformación.

Solución: $F_2(q,P) = qP + \frac{1}{2} cq^2$. No se puede obtener $F_1(q,Q)$.

PROBLEMA 4.5. Dada la transformación

$$Q_j = -p_j \tan(t)\ , \quad P_j = q_j \mathrm{ctg}(t) \qquad \forall j = 1,\ldots n,$$

determine si se trata de una transformación canónica y, en ese caso, determine la función generatriz.

Solución: $F_1(q_j, Q_j) = -\mathrm{cotan}(t) \sum_i q_i Q_i + f(t)$.

PROBLEMA 4.6. Obtenga la función generatriz $F_1(q,Q,t)$ que, para el problema de caída libre de un cuerpo en el campo gravitatorio terrestre, transforma la función Hamiltoniana original, H, en una nueva Hamiltoniana, K, que sólo es función de la coordenada Q y que, además, cumple $P=p$.

Solución: $F_1(z,Z) = -\frac{2}{3}\sqrt{2gm^2}\left(Z-z\right)^{\frac{3}{2}}$ y $K(Z,P) = K(Z) = mgZ$, donde z es el eje vertical.

PROBLEMA 4.7. Un sistema físico tiene por Hamiltoniana a la función

$$H = p_1^2 + p_2^2 + \frac{1}{8}\gamma_1^2 \left(q_1 - q_2\right)^2 + \frac{1}{8}\gamma_2^2 \left(q_1 + q_2\right)^2,$$

donde γ_1 y γ_2 son constantes.

a) Compruebe si las siguiente transformación es canónica

$$q_1 = \sqrt{\frac{2Q_1}{\gamma_1}} \cos P_1 + \sqrt{\frac{2Q_2}{\gamma_2}} \cos P_2, \quad p_1 = \sqrt{\frac{\gamma_1 Q_1}{2}} \sin P_1 + \sqrt{\frac{\gamma_2 Q_2}{2}} \sin P_2,$$

$$q_1 = -\sqrt{\frac{2Q_1}{\gamma_1}} \cos P_1 + \sqrt{\frac{2Q_2}{\gamma_2}} \cos P_2, \quad p_2 = -\sqrt{\frac{\gamma_1 Q_1}{2}} \sin P_1 + \sqrt{\frac{\gamma_2 Q_2}{2}} \sin P_2.$$

b) Determine la nueva Hamiltoniana y las ecuaciones de Hamilton que de ella se derivan para las nuevas coordenadas.
Solución: a) es canónica, b) $K(Q,P)=\gamma_1 Q_1+\gamma_2 Q_2$.
Ecuaciones del movimiento: $\dot{Q}_1=0,\ \dot{Q}_2=0,\ \dot{P}_1=-\gamma_1,\ \dot{P}_2=-\gamma_2$.

PROBLEMA 4.8. Una trasformación, $Q_i=Q_i(q_j,p_j,t),\ P_i=P_i(q_j,p_j,t),$ se dice canónica de valencia λ, si y sólo si existe una función $F(q_j,p_j,t)$ tal que

$$dF(q_j,p_j,t)=\sum_i \lambda p_i dq_i-\sum_i P_i(q_j,p_j,t)dQ_j(q_j,p_j,t)+\frac{\partial F(q_j,Q_j,t)}{\partial t}dt\ ,$$

donde se cumple

$$\frac{\partial F(q_j,Q_j,t)}{\partial t}=\frac{\partial F(q_j,p_j,t)}{\partial t}+\sum_i P_i(q_j,p_j,t)\frac{\partial Q_i(q_j,p_j,t)}{\partial t}\ .$$

En estas transformaciones se cumple para $F_1(q_j,Q_j,t)$:

$$\lambda p_i=\frac{\partial F_1(q_j,Q_j,t)}{\partial q_i}\ ,\quad P_i=-\frac{\partial F_1(q_j,Q_j,t)}{\partial Q_i}\ ,$$

$$K(Q_j,P_j,t)=\lambda H(q_j,p_j,t)+\frac{\partial F_1(q_j,Q_j,t)}{\partial t}.$$

En este contexto, demuestre que la transformación

$$Q=\alpha q+\beta p,\quad P=\alpha' q+\beta' p$$

es canónica y que su valencia es $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0$.

Solución: $F(q,p)=-\frac{1}{2}\alpha\alpha' q^2-\frac{1}{2}\beta\beta' p^2-\alpha'\beta qp$ y de ésta se obtiene, por ejemplo, $F_1(q,Q)=F(q,p(q,Q))$ o $F_2(q,Q)=F(q,p(q,P))+PQ(q,P)$.

PROBLEMA 4.9. La Hamiltoniana de cierto sistema de un grado de libertad es $H=p^2-q$. Resuelva el movimiento utilizando la transformación canónica $Q=p$ y $P=-q$.

Solución: $K(Q,P)=Q^2+P,\ \ Q=Q_0+t,\ \ P=P_0-2Q_0t-t^2$ que, transformando a las variables originales, conduce a $p=p_0+t$ y $q=q_0+2p_0t+t^2$.

PROBLEMA 4.10. El movimiento de una partícula de masa *m* sometida a la gravedad es:

$$x = x_0 + \frac{p_0}{m}t + \frac{1}{2}gt^2,$$
$$p = p_0 + mgt,$$

siendo x la vertical en la dirección de *g*.

a) Demuestre que la transformación que lleva $\{x, p\}$ a los valores iniciales es canónica.
b) Compruebe que la Hamiltoniana sólo depende del tiempo. Discuta este resultado.

Solución:

a) La transformación se define mediante $Q=x_0$ y $P=p_0$. Se obtiene
$$F_1(x, x_0, t) = \frac{m}{2t}(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}mgt(x + x_0)$$
b) Se obtiene una Hamiltoniana que sólo depende de una función del tiempo que es irrelevante a la hora de aplicar las ecuaciones del movimiento.

PROBLEMA 4.11. Una partícula de masa *m* está obligada a moverse por un alambre rectilíneo horizontal que gira a velocidad angular constante, ω, en torno a un eje vertical que pasa por su centro. La partícula está sometida a una fuerza recuperadora proporcional a la distancia del centro del eje, $F=-k\rho$.

a) Demuestre, utilizando la formulación Lagrangiana, que la coordenada ρ describe un movimiento armónico simple, con
$$\rho(t) = \sqrt{A}\sin\phi(t) = \sqrt{A}\sin(\Omega t + \phi_0)\,,$$
con una frecuencia angular $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}$.
b) Compruebe que la transformación $Q=\phi$, $P=A$, es canónica y determine su valencia.

Solución: b) $F_1(\rho, \phi) = \rho^2 \mathrm{cotan}(\phi)$ y valencia $\lambda = \dfrac{2}{m\Omega}$.

PROBLEMA 4.12. Deduzca el movimiento tridimensional de una partícula de masa *m* sometida a la acción de la gravedad, haciendo uso de la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Solución: Se obtiene la función principal

$$S(x, y, x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) = \pm\sqrt{2m\alpha_1}\,x \pm \sqrt{2m\alpha_2}\,y \pm \sqrt{\frac{8}{9mg^2}}(\alpha_3 - mgz)^{\frac{3}{2}} - \sum_{i=1}^{3}\alpha_i t$$

De ella se desprende:

$$x = \pm\sqrt{\frac{2\alpha_1}{m}}(\beta_1 + t),\ \ y = \pm\sqrt{\frac{2\alpha_2}{m}}(\beta_2 + t),\ \ z = \frac{\alpha_3}{mg} - \frac{g}{2}(\beta_3 + t)^2.$$

PROBLEMA 4.13. Con la ayuda de la teoría de Hamilton-Jacobi, resuelva el problema del oscilador armónico unidimensional, $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$.

PROBLEMA 4.14. Escriba la ecuación de Hamilton-Jacobi en términos de la función característica, *W*, de un partícula que se mueve en un plano bajo la acción de una fuerza central, cuyo potencial viene dado por $V(r) = -kr^{-1} - Br^{-2}$, siendo, *k*, *B* > 0. Una vez formulada la ecuación, determine *W* y *S* y encuentre expresiones formales para el tiempo que tarda una partícula en desplazarse de un punto a otro y para la ecuación de la órbita.

Solución:

$$S(r,\phi,E,L,t) = L\phi + \int \sqrt{2mE - \frac{L^2}{r^2} + 2m\left(\frac{k}{r} + \frac{B}{r^2}\right)}dr - Et$$

Tiempo invertido: $t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{mdr}{\sqrt{2mE - \frac{L^2}{r^2} + 2m\left(\frac{k}{r} + \frac{B}{r^2}\right)}}$

Trayectoria: $\phi - \phi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{\frac{L}{r^2}dr}{\sqrt{2mE - \frac{L^2}{r^2} + 2m\left(\frac{k}{r} + \frac{B}{r^2}\right)}}$

PROBLEMA 4.15. Determine mediante el método de las variables de acción y de ángulo, la frecuencia de las oscilaciones de una partícula de masa, *m*, sometida a un potencial unidimensional de la forma $V(x)=k|x|$, con $k>0$.

Solución: $J = \sqrt{\frac{32mE^3}{9\pi^2k^2}}$, $\omega = \frac{2}{3}\left(\frac{9\pi^2k^2}{32m}\right)^{\frac{1}{2}} E^{-\frac{1}{2}}$.

PROBLEMA 4.16. Una partícula de masa unidad y energía *E* se mueve en el seno de un potencial de la forma $V(q)=U\tan^2(aq)$, donde *U* y *a* son constantes positivas.

a) Encuentre los puntos de retorno de las trayectoria en función de *E*.
b) Demuestre que la variable de acción viene dada por $J = \frac{\sqrt{2}}{a}\left[\sqrt{E+U} - \sqrt{U}\right]$. Sugerencia: la sustitución de $x=\tan(aq)$ en la integral del momento puede ayudar.
c) Demuestre que el periodo de oscilación varía con la energía de la partícula como

$$\tau = \frac{\sqrt{2}\pi}{a\sqrt{E+U}}.$$

Solución: a) $q_0 = \frac{1}{a}\arctan\sqrt{\frac{E}{U}}$.

PROBLEMA 4.17. Una partícula de masa m se mueve en el espacio dentro de un recinto rectangular de dimensiones $a\times b\times c$, de forma que el potencial $V(x, y, z)$ es nulo cuando $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$, $z \in [0, c]$, e infinito en otro caso. Calcule las variables de acción y sus frecuencias.

Solución: $J_x = \dfrac{Aa}{\pi},\ J_y = \dfrac{Bb}{\pi},\ J_z = \dfrac{Cc}{\pi},\ \omega_x = \dfrac{A\pi}{ma},\ \omega_x = \dfrac{B\pi}{mb},\ \omega_z = \dfrac{C\pi}{mc}.$

PROBLEMA 4.18. a) Demuestre que una transformación es canónica si y sólo si los paréntesis de Lagrange satisfacen $\left(q_i, q_j\right) = 0,\ \left(p_i, p_j\right) = 0,\ \left(q_i, p_j\right) = \delta_{ij}$. b) Demuestre, utilizando esta propiedad, que la transformación del problema 1 es canónica.

PROBLEMA 4.19. Considere la siguiente transformación canónica:

$$Q = (2q)^{1/2} e^{k} \cos p, \quad P = (2q)^{1/2} e^{-k} \sin p.$$

a) Compruebe que los corchetes de Poisson $[Q,Q]$, $[P,P]$ y $[Q,P]$ son invariantes ante la mencionada transformación canónica. b) Compruebe asimismo la invariancia de los paréntesis de Lagrange.

PROBLEMA 4.20. Demuestre el teorema de Poisson que establece que si dos magnitudes f y g son constantes del movimiento, el corchete de Poisson $[f,g]$ también es una constante del movimiento.

PROBLEMA 4.21. Obtenga las ecuaciones del movimiento del tiro oblicuo utilizando los corchetes de Poisson.

PROBLEMA 4.22. Sean L_1, L_2 y L_3 las componentes cartesianas del momento angular, $\vec{L}$, de una partícula. Determine:

a) Los corchetes de Poisson $[L_i,L_j]$ y $[L_i,L]$, siendo L el módulo de $\vec{L}$.
b) Mostrar que si dos de las componentes de $\vec{L}$ son constantes, la otra componente ha de ser, también, constante.

Solución: a) $[L_1, L_2]=L_3$, $[L_2, L_3]=L_1$, $[L_3, L_1]=L_2$, $[L_1, L_2]=L_3$, $[L_i, L]=0$. b) Inmediato si se aplica el resultado anterior y el Tª de Poisson.

PROBLEMA 4.23. Considere una partícula de masa m sometida a una fuerza central conservativa que deriva de un potencial $V(r)$. Demuestre, utilizando los corchetes de Poisson, que el momento cinético de la partícula respecto del origen de coordenadas es constante.